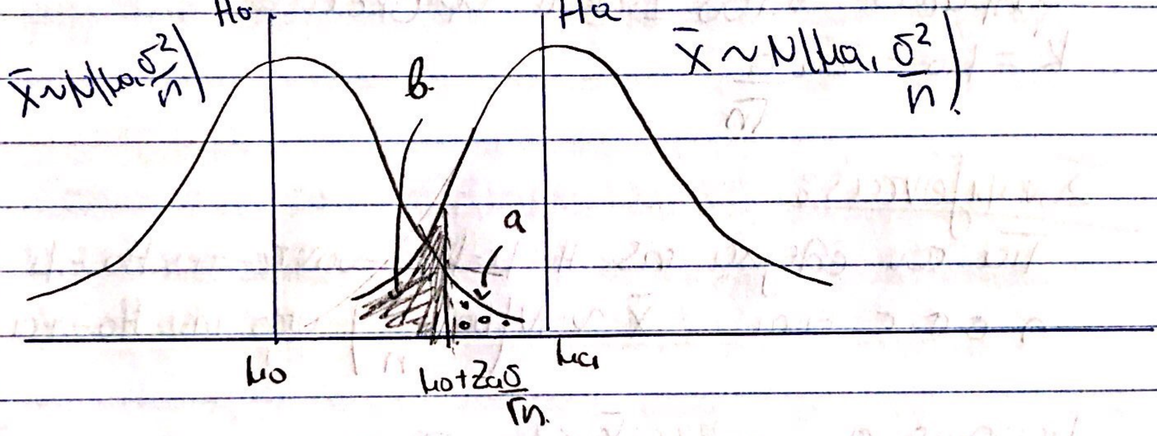
Παρασκευή 29/05/20:

Παρατήρηση:

Το ανώτερο τεστ είναι γνωστό ως Z-τεστ και δίνει τη δυνατότητα με μορφή αντιπαραδείγματος να διαπιστώσουμε ότι οι πιθανότητες α και β δεν μπορούν να ελαχιστοποιηθούν ταυτόχρονα.

$$\alpha = P(\text{Απορ. } H_0 \mid H_0 \text{ αληθ.}) = P\left(\bar{X} \geq \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\middle|\; \bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)\right)$$

$$\beta = P(\text{Αποδ } H_0 \mid H_a \text{ αληθ.}) = P\left(\bar{X} \leq \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\middle|\; \bar{X} \sim N\left(\mu_a, \frac{\sigma^2}{n}\right)\right)$$



Σμίκρυνση της β έχει ως αποτέλεσμα αύξηση της α και αντίστροφα.

Παράδειγμα:

Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ σ^2 γνωστή. Να κατασκευαστεί I-τεστ μεγέθους α για τον έλεγχο της $H_0: \mu = \mu_0$ (μ_0 γνωστό), έναντι $H_a: \mu = \mu_a$ (μ_a γνωστό, $\mu_a < \mu_0$)

Ακολουθώντας τα βήματα του προηγούμενου παραδείγματος:

$$\frac{L_0}{L_a} \leq k \quad \text{ή} \quad 2(\mu_a - \mu_0) \sum_{i=1}^{n} X_i \geq -2\sigma^2 \log k + n(\mu_a^2 - \mu_0^2).$$

Επειδή $\mu_a < \mu_0$ έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq -\frac{2\sigma^2 \log k + n(\mu_a^2-\mu_0^2)}{2(\mu_a-\mu_0)}$$

ή $$\bar{x} \leq -\frac{2\sigma^2 \log k + n(\mu_a^2-\mu_0^2)}{2n(\mu_a-\mu_0)} = k'$$

και η κ.π είναι $C_1 = \{\underline{X} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \bar{X} \leq k'\}$

Το κ.σ k' υπολογίζεται ξανά από την πιθανότητα σφάλματος τύπου Ι και βρίσκεται:

$$k' = \mu_0 - z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

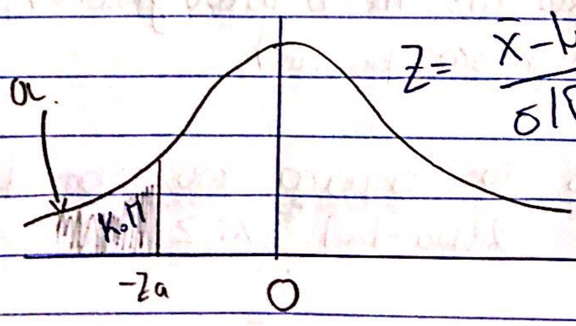
Συνοψίζοντας:

Για τον έλεγχο της $H_0: \mu=\mu_0$ έναντι της $H_a: \mu=\mu_a \ (\mu_a<\mu_0)$
η σ.σ.τ είναι $\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ υπό την H_0 και κ.π

μεγέθους α την $\bar{X} \leq \mu_0 - z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Ισοδύναμα:

Για τον έλεγχο της $H_0: \mu=\mu_0$ έναντι της $H_a: \mu=\mu_a \ (\mu_a<\mu_0)$
η σ.σ.τ. είναι $Z = \frac{\bar{X}_0-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ με κατανομή $N(0,1)$
υπό την H_0, κ.π μεγέθους α την $Z \leq -z_a$



$$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Έλεγχος απλής μηδενικής προς σύνθετη εναλλακτική

Έστω τ.δ. $X_1, \dots X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta$

Έστω μια απλή $H_0: \theta = \theta_0$ και μια σύνθετη $H_a: \theta > \theta_0$ ή $\theta < \theta_0$ ή $\theta \neq \theta_0$, $\theta_0 \in \Theta$

Έστω το Ισχυρότατο τεστ μεγέθους α για τον έλεγχο της $H_0: \theta = \theta_0$ έναντι της $H_a^*: \theta = \theta_a$, όπου $\theta_a \in H_a$

Είναι το ίδιο για κάθε $\theta_a \in H_a$

Τότε το τέστ αυτό είναι ομοιόμορφα ισχυρότατο τεστ μεγέθους α της H_0 έναντι της σύνθετης H_a.

Παράδειγμα:

Έστω τ.δ. από πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 γνωστό

Να κατασκευαστεί ΟΙ τεστ για τον έλεγχο

$H_0: \mu = \mu_0$ έναντι $H_a: \mu > \mu_0$.

Θεωρούμε τον έλεγχο απλής προς απλή

$H_0: \mu = \mu_0$ έναντι $H_a^*: \mu = \mu_a$ με $\mu_a > \mu_0$

Για τον έλεγχο αυτό το Ι-τεστ βρέθηκε να έχει σ.σ.τ την $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ με κατανομή $N(0,1)$ υπό την H_0

και κ.π. μεγέθους α την $Z \geq Z_a$

Παρατηρούμε ότι το τεστ αυτό είναι ανεξάρτητο του μ_a, για κάθε $\mu_a > \mu_0$. Άρα το τεστ αυτό είναι ΟΙ-τεστ.

για τον έλεγχο $H_0: \mu = \mu_0$ έναντι $H_a: \mu > \mu_0$.

Παράδειγμα:

Έστω τ.δ. $X_1, .. X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $Εκθ(λ)$, $λ>0$. Να κατασκευαστεί ΟΙ τεστ για τον έλεγχο $H_0: λ=λ_0$, $λ_0$ γνωστό έναντι της $H_a: λ>λ_0$

Επειδή πρόκειται για έλεγχο απλής μηδενικής έναντι σύνθετης εναλλακτικής, θεωρούμε τον έλεγχο:

$H_0: λ=λ_0$, έναντι $H_a^*: λ=λ_a$ με $λ_a>λ_0$

Για τον έλεγχο αυτό το Ι-τεστ μεγέθους α έχει κ.π.

$$\frac{L_0}{L_a} \le k \quad \text{ή} \quad \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i, λ_0)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i, λ_1)} \le k.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $f(x,λ) = λ e^{-λx}$, $λ>0$, $x>0$

$$\frac{L_0}{L_a} < k \Rightarrow \frac{λ_0^n e^{-λ_0 \sum x_i}}{λ_a^n e^{-λ_a \sum x_i}} \le k \overset{λ_1, λ_0 > 0}{\Rightarrow} e^{-(λ_0-λ_a)\sum x_i} \le \left(\frac{λ_a}{λ_0}\right)^n k.$$

$$\Rightarrow (λ_a-λ_0)\sum x_i \le \log\left(\frac{λ_a}{λ_0}\right)^n k. \quad , \text{ επειδή } λ_a>λ_0$$

$$\sum x_i \le \frac{\log\left(\frac{λ_a}{λ_0}\right)^n \cdot k}{λ_a-λ_0} = k'$$

Το k' υπολογίζεται:

$α = P(\text{Απορ. } H_0 \mid H_0 \text{ αληθ}) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le k' \mid X_i \sim Εκθ(λ_0)\right)$

Η σ.π.π της $Εκθ(λ_0)$ είναι $λ_0 e^{-λ_0 x}$ και της $G\left(1, \frac{1}{λ_0}\right)$

είναι $\frac{1}{\left(\frac{1}{λ_0}\right)^1 Γ(1)} x^{1-1} e^{-x/(1/λ_0)} = λ_0 e^{-λ_0 x}$

Άρα $Εκθ(λ_0) \equiv G\left(1, \frac{1}{λ_0}\right)$

Με τη μέθοδο των ροπογεννητριών μπορεί να δειχθεί ότι αν $X_i \sim G(a_i, \beta)$ τότε $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(\sum_{i=1}^{n} a_i, \beta)$.

Επειδή $X_i \sim G(1, \frac{1}{\lambda_0})$ το $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(n, \frac{1}{\lambda_0})$

και το k' υπολογίζεται από τη σχέση

$$\int_0^{k'} \frac{1}{(\frac{1}{\lambda_0})^n \Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx = a.$$

Θεωρούμε τη σ.τ. συνάρτηση $T = 2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} X_i = 2\lambda_0 Y$

$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(n, 1/\lambda_0)$.

Με αλλαγή μεταβλητών:

$$f_T(t) = f_Y\left(\frac{t}{2\lambda_0}\right) \left|\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2\lambda_0}\right)\right| = \frac{1}{(\frac{1}{\lambda_0})^n \Gamma(n)} \left(\frac{t}{2\lambda_0}\right)^{n-1} e^{-\frac{(t/2\lambda_0)}{(1/\lambda_0)}} \left|\frac{1}{2\lambda_0}\right|$$

$$= \frac{\lambda_0^n}{2^n \Gamma(n)} t^{n-1} e^{-t/2} - \frac{1}{2^n \Gamma(n)} t^{n-1} e^{-t/2}, \quad t > 0$$

Επομένως $T = 2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(n, 2)$

Γενικά ισχύει ότι $G(k, \lambda) \equiv \frac{\lambda}{2} \chi^2_{2k}$

Επομένως $T = 2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$

Έτσι $a = P(\sum_{i=1}^{n} X_i \le k' \mid X_i \sim Εκθ(\lambda_0)) =$

$= P(2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} X_i \le 2\lambda_0 k' \mid X_i \sim Εκθ(\lambda_0)) = P(T \le k'' \mid T \sim \chi^2_{2n})$

$\Rightarrow P(T \ge k'' \mid T \sim \chi^2_{2n}) = 1 - a \quad \Rightarrow k'' \ \chi^2_{2n, 1-a}$

Συγκεντρωτικά:

Για τον έλεγχο της $H_0: \lambda=\lambda_0$ έναντι της $H_a^*: \lambda=\lambda_a, \lambda_a>\lambda_0$
Η στατιστική συνάρτηση του τέστ είναι $T=2\lambda_0\sum_{i=1}^{n}X_i$
με κατανομή X^2_{2n} υπό την H_0 και η κρ. περιοχή
μεγέθους α είναι $T=2\lambda_0\sum_{i=1}^{n}X_i \le X^2_{2n,1-a}$.

Το τέστ αυτό δεν εξαρτάται από το λ_a. Άρα είναι το
ΟΙ-τέστ για τον έλεγχο των αρχικών υποθέσεων
$H_0: \lambda=\lambda_0$, $H_a: \lambda>\lambda_0$

Παράδειγμα:

Έστω τ.δ $X_1,\dots X_n$ από κανονικό πληθυσμό $N(\mu,\sigma^2)$, σ^2 γνωστό
Έστω επίσης $Z=(\bar{X}-\mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$ το σ.τ για τον έλεγχο
της $H_0: \mu=\mu_0$ έναντι της $H_a: \mu=\mu_a(\neq\mu_0)$.
i) Να βρεθεί η κατανομή Z όταν ισχύει η H_a
ii) Να δειχθεί ότι $a+b\le 1$ όπου a,b οι πιθανότητες σφάλματος τύπου I, II

(i) Όταν ισχύει η $H_a: \mu=\mu_a$, τότε $\bar{X}\sim N\left(\mu_a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ και
$$\frac{\bar{X}-\mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

Έτσι $$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\bar{X}-\mu_0+\mu_a-\mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\bar{X}-\mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}+\frac{\mu_a-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Υπό την H_a, το Z είναι γρ. συνδυασμός της $N(0,1)$ κατανομής του $\frac{\bar{X}-\mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}$ και επομένως $Z\sim$ κανονική κατανομή

με μέση τιμή $$\mu_Z=E(Z)=E\left(\frac{\bar{X}-\mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}\right)+\frac{\mu_a-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=0+\frac{\mu_a-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

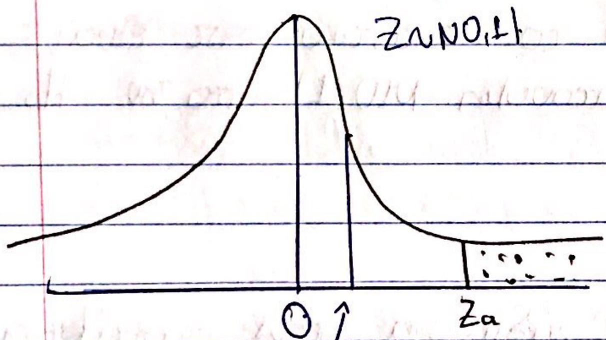
και διακύμανση
$$\sigma_Z^2=Var(Z)=Var\frac{\bar{X}-\mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}=1$$

Επομένως, υπό την Ηα: $\mu=\mu_a$, το $Z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N\left(\dfrac{\mu_a-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, 1\right)$

(ii) Έστω ο έλεγχος της $H_0: \mu=\mu_0$ έναντι της $H_a: \mu=\mu_a$ ($\mu_a \neq \mu_0$)
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: $\mu_a > \mu_0$ και $\mu_a < \mu_0$

α) $\mu_a > \mu_0$: Σε αυτή την περίπτωση το σ.τ είναι το $Z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ με κατανομή $N(0,1)$ υπο την H_0 και κ.π $Z \geq Z_a$

Τώρα με τη βοήθεια του σχήματος



$Z_a - \dfrac{\mu_a-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.

$a+\beta = P(\text{Απορ } H_0 \mid H_0 \text{ αληθ}) + P(\text{Αποδ } H_0 \mid H_a \text{ αληθ.}) =$

$= P\left(\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq Z_a \,\middle|\, \bar{X} \sim N\left(\mu_0, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)\right) + P\left(\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} - \dfrac{\mu_a-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z_a - \dfrac{\mu_a-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$

$= P(Z \geq Z_a) + P\left(\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} - \dfrac{\mu_a-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z_a - \dfrac{\mu_a-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$

$= P(Z \geq Z_a) + P\left(Z \leq Z_a - \dfrac{\mu_a-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$ $Z \sim N(0,1)$

Επειδή $\mu_a > \mu_0$ το $\dfrac{\mu_a-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > 0$ και επομένως

$Z_a - \dfrac{\mu_a-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z_a$.

Έτσι $\alpha+\beta = P(Z \geq Z_\alpha) + P\left(Z \leq Z_\alpha - \frac{\mu_\alpha - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$, $Z \sim N(0,1)$

$= 1 - P\left(Z_\alpha - \frac{\mu_\alpha - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z \leq Z_\alpha\right)$, $Z \sim N(0,1)$

≤ 1 αφου $P\left(Z_\alpha - \frac{\mu_\alpha - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z \leq Z_\alpha\right) \geq 0$

β) Περίπτωση $\mu_\alpha < \mu_0$:

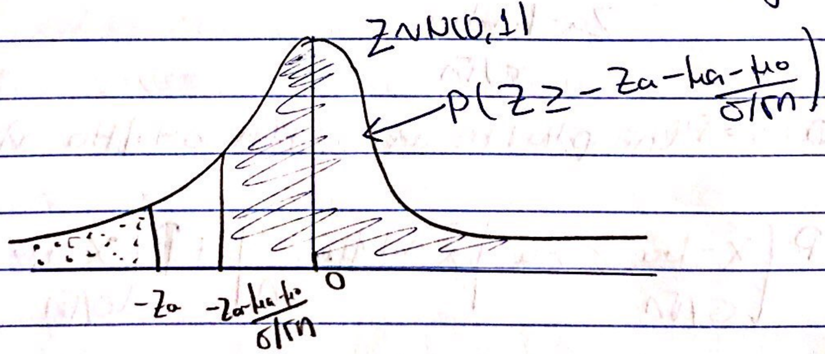
Έστω προς έλεγχο $H_0: \mu = \mu_0$, έναντι της $H_\alpha: \mu = \mu_\alpha (\mu_\alpha < \mu_0)$

Στην περίπτωση αυτή το στατιστικό τέστ είναι:

$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ με κατανομή $N(0,1)$ υπο την H_0

και κ.π $Z \leq -Z_\alpha$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως προηγούμενα.



$\alpha+\beta = P(Z \leq -Z_\alpha) + P\left(Z \geq -Z_\alpha + \frac{\mu_\alpha - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$, $Z \sim N(0,1)$

$\mu_\alpha < \mu_0 \Rightarrow \frac{\mu_\alpha - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < 0$ και έτσι $-Z_\alpha < -Z_\alpha - \frac{\mu_\alpha - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Απο τα προηγούμενα και το σχήμα προκυπτει

$\alpha+\beta = 1 - P\left(-Z_\alpha \leq Z \leq -Z_\alpha - \frac{\mu_\alpha - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \leq 1$

αφου $P\left(-Z_\alpha \leq Z \leq -Z_\alpha - \frac{\mu_\alpha - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \geq 0$

Παράδειγμα:

Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_{12}$ από κατανομή Poisson(θ).
Για τον έλεγχο της $H_0: \theta = 1/2$ ως προς την $H_a: \theta \leq 1/2$.
χρησιμοποιούμε την κ.π $\sum_{i=1}^{12} X_i \leq 2$.

i) Να υπολογιστεί το επίπεδο σημαντικότητας α του τεστ.
ii) Να βρεθεί η συνάρτηση ισχύος και να σχεδιαστεί.

Η σ.σ.τ είναι $T = \sum_{i=1}^{12} X_i$, με κατανομή $T \sim P(12\theta) = P(6)$
υπό την $H_0: \theta = 1/2$ και $T \sim P(12\theta)$ υπό την $H_a: \theta < 1/2$

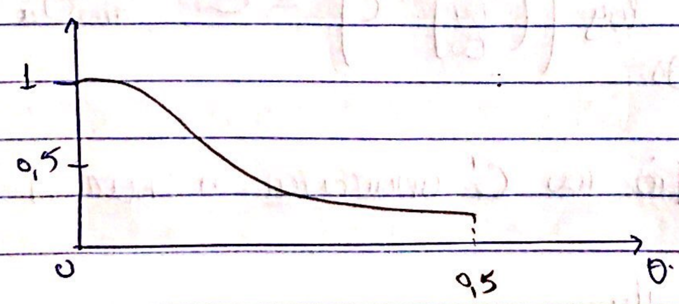
i) $\alpha = P(\text{Απορ } H_0 \mid H_0 \text{ αληθ}) = P(T \leq 2 \mid T \sim P(6))$
$= P(T=0) + P(T=1) + P(T=2) = \sum_{t=0}^{2} \frac{e^{-6} 6^t}{t!} \Rightarrow \alpha = 0{,}062.$

ii) $\gamma(\theta) = 1 - \beta(\theta) = 1 - P(\text{Αποδ. } H_0 \mid H_a \text{ αληθ}) = P(\text{Απορ } H_0 \mid H_a \text{ αληθ})$
$= P(T \leq 2 \mid T \sim P(12\theta), \theta < 1/2).$

$= P(T \leq 2), \quad p_T(t) = \frac{e^{-12\theta}(12\theta)^t}{t!}, \; t = 0, 1, \dots$

$= \frac{e^{-12\theta}(12\theta)^0}{1} + \frac{e^{-12\theta} \cdot 12\theta}{1} + \frac{e^{-12\theta}(12\theta)^2}{2}$

$\Rightarrow \gamma(\theta) = e^{-12\theta}(1 + 12\theta + 72\theta^2), \; \theta < 1/2.$



Άσκηση ΟΙ - τεστ:

Έστω τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $f(x,\theta) = \theta^2 x e^{-\theta x}$, $x>0$, $\theta>0$

Να κατασκευαστεί το ομοιόμορφα Ισχυρότατο τεστ μεγέθους α για τον έλεγχο $H_0: \theta=\theta_0$, θ_0 γνωστό ένατι της $H_a: \theta \geq \theta_0$

Θεωρούμε τον έλεγχο της $H_0: \theta=\theta_0$, θ_0 γνωστό έναντι $H_a: \theta=\theta_a$, $\theta_a > \theta_0 > 0$

Είναι $\dfrac{L_0}{L_a} = \dfrac{\prod_{i=1}^{n} \theta_0^2 x_i e^{-\theta_0 x_i}}{\prod_{i=1}^{n} \theta_a^2 x_i e^{-\theta_a x_i}} = \dfrac{(\theta_0^2)^n}{(\theta_a^2)^n} \, e^{-(\theta_0-\theta_a)\sum_{i=1}^{n} x_i}$

$\Rightarrow \dfrac{L_0}{L_a} = \left(\dfrac{\theta_0}{\theta_a}\right)^{2n} e^{-(\theta_0-\theta_a)\sum_{i=1}^{n} x_i}$

Από την παραπάνω σχέση διαφαίνεται ως στατιστική συνάρτηση του τεστ η $\sum_{i=1}^{n} X_i$ ενώ η κ.π θα είναι

$\dfrac{L_0}{L_a} \leq C$ ή $\left(\dfrac{\theta_0}{\theta_a}\right)^{2n} e^{-(\theta_0-\theta_a)\sum_{i=1}^{n} x_i} \leq C$

$\Rightarrow -(\theta_0-\theta_a)\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \log\left(\left(\dfrac{\theta_a}{\theta_0}\right)^{2n} \cdot C\right)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \dfrac{1}{\theta_a-\theta_0} \log\left(\left(\dfrac{\theta_a}{\theta_0}\right)^{2n} \cdot C\right) = C'$, αφού $\theta_a > \theta_0$

Για τον υπολογισμό του C' απαιτείται η κατανομή του

$\sum_{i=1}^{n} X_i$ υπο την H_0

Αναγνωρίζοντας την κατανομή της X_i έχουμε $X_i \sim G(2, \frac{1}{\theta})$
με την μέθοδο των ροπογεννητριών μπορεί να αποδειχτεί
ότι $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(2n, 1/\theta)$

Με αλλαγή μεταβλητών θα αναζητήσουμε την κατανομή της τ.μ.
$T = 2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i$, έστω $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, τότε $Y \sim G(2n, 1/\theta)$.

$$f_T(t) = f_Y\left(\frac{t}{2\theta}\right) \left|\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2\theta}\right)\right| = \frac{1}{\left(\frac{1}{\theta}\right)^{2n}\Gamma(2n)} \left(\frac{t}{2\theta}\right)^{2n-1} e^{-\frac{(t/2\theta)}{(1/\theta)}} \left|\frac{1}{2\theta}\right|$$

$$= \frac{\theta^{2n}}{2^{2n}\Gamma(2n)} \frac{1}{\theta^{2n}} t^{2n-1} e^{-t/2} = \frac{1}{2^{2}\Gamma(2n)} t^{2n-1} e^{-t/2}$$

Άρα $T = 2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(2n, 2)$.

~~Ισχύει~~
Ισχύει ότι $G(k, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \chi^2_{2k}$

άρα $T = 2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(2n, 2) \equiv \chi^2_{4n}$

Συνοψίζοντας η κ.π. μεγέθους α είναι $\sum_{i=1}^{n} X_i \leq c'$
$\Rightarrow 2\theta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i \leq 2\theta_0 c' = c''$

Υπολογισμός του c''

$a = P(\text{απορ } H_0 | H_0 \text{ αληθ}) = P(2\theta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i \leq c'' \mid X_i \sim G(2, 1/\theta))$

$= P(2\theta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i \leq c'' \mid 2\theta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{4n}) = P(\chi^2_{4n} \leq c'')$

$\Rightarrow P(\chi^2_{4n} > c'') = 1 - a \Rightarrow c'' = \chi^2_{4n, 1-a}$.

Συνοψίζοντας για τον έλεγχο της $H_0: \theta=\theta_0$ έναντι της $H_a: \theta=\theta_a$, $\theta_a > \theta_0 > 0$ η σ.σ.τ. είναι $T = 2\theta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i$ με κατανομή

χ^2_{4n} υπό την H_0 και κ.π. μεγέθους α $T = 2\theta_0 \sum X_i \le \chi^2_{4n,1-a}$

Το τεστ αυτό είναι ανεξάρτητο του θ_a. Άρα είναι το ΟΙ-τεστ για τον έλεγχο της $H_0: \theta=\theta_0$ έναντι της $H_a: \theta>\theta_0$.

Τέλος εξεταστέας ύλης.